**Простейшая модель газо- и гидро-динамики – уравнение Бейтмана - Бюргерса:**

, число Рейнольдса ,

где  - скорость,  - коэффициент вязкости, , периодичность по *х*.

Для компактной аппроксимации перепишем в виде:

,  .

С помощью замены Форсайта – Флорина – Коула – Хопфа получаем из решения  для обычного уравнения диффузии точное решение уравнения (2):

 .

На нем оценим погрешности различных разностных схем. Компактная поправка (при очень маленьких *D* - со сглаживанием) и тут подавляет осцилляции. Аппроксимируем дифференциальное уравнение (2) с условием периодичности на сетке, где  - шаг по времени, ,  - шаг по пространству; .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

**Рис 7**. Решение компактной схемы после АБ для  = 0.006, *h* = 0.03, D = 0,4, в разные моменты времени. 8а) начальное условие для аналитического решения (2) уравнения Б-Б: ; 8б) ; 8в) решение по явной схеме для начального условия 8а); 8г) решение по явной схеме для начального условия 8б)

Результаты (погрешности разностного решения) при использовании различных явных схем для вычисления первого приближения довольно близки. В окрестности градиентной катастрофы осцилляции эффективно подавляются а) несколькими последовательными линеаризациями; б) использованием сглаживающих операторов (иногда односторонних) в окрестности скачка решения.

**Уравнение Фишера – Колмогорова – Петровского - Пискунова**

, (3)

где  - относительная плотность распределения числа особей с доминантным геном,.

Тестовые функции схемы - мономы .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Рис 8. Шаблоны для решения  и правой части компактной схемы и диаграмма Ньютона тестовых функций 

Таблица 2. Пары тестовых функций и «локальная» СЛАУ для определения коэффициентов компактной схемы (5)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | *u* | *f* | Уравнение |
| 1 | 1 | 0 |  |
| 2 | t | 1 |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  | -2V |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
|  |  | нормировочное |  |

Решение «локальной» СЛАУ: ,, ,

,, .

На каждом шаге для решения системы (4), будем использовать явные схемы: Адамса – Бэшфорда или Эйлера, а затем применять компактную корректировку.

Явная схема АБ (второй порядок точности) состоит из двух шагов:

* Предиктор .
* Корректор .

Явная схема Эйлера (первый порядок точности) состоит из одного шага:

 .

|  |  |
| --- | --- |
|  | Рис. 9 График точного решения (3) уравнения ФКПП, *D = 1, T* = 10    График ведет себя как “бегущая волна”. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Рис 10. С**-норма погрешности схем в зависимости от разрешения *N* в log-системе до *T* = 2. Параметры для мелкой сетки D *= 0,004,h =* */(2\*400),*  = 2/4096  Начальное условие.  Порядки точности:  1,8 (Явная АБ)/3,02(Компактная &АБ)/ 3,02(Компактная & Эйлер) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Рис 11. С**-норма погрешности схем в зависимости от разрешения *N* в **ln**-системе до *T* = 2. Параметры для мелкой сетки *D = 0,002,h = 2**/400,*  = 2/4096  Начальное условие.  Порядки точности:  1,05(Явная АБ)/3,4(Компактная & АБ) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Рис 12.** Оценка скорости бегущей волны по серединной точке профиля от времени до *T* = 40. Параметры D *= 1, h = 400/400,*  = 40/1024  Начальное условие.  Серединная координата двигается со скоростью 2. |

Важный критерий точности аппроксимации – точность, с которой воспроизводится известная из теории (см., например, [КПП]) скорость перемещения волны. Будем оценивать ее по скорости перемещения со временем точки, в которой решение *u* принимает значение ½. Пусть *J=J(t)* – индекс, такой что  . Определим  формулой .

Компактная схема имеет порядок точности много больший чем у явной схемы.

Явная схема условноустойчива. При  устойчива, при  неустойчива.

Таблица 3. Погрешность явных/компактных схем в зависимости от параметров уравнения ФКПП для

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Схема явная/компактная | Норма | Параметры | Порядок |
| АБ | C | *D = 0,0002, T =2,* | 1,67/1,91 |
| АБ | C | *D = 0,005, T = 2**,* | 1/3,4 |
| Эйлер | C | *D = 0,002, T* = 2, | 1,9/3,02 |

Граница устойчивости компактной схемы: до .

Граница устойчивости схемы АБ: .